PARTE 3, ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

ESERCIZI SU:

(Ultima pagina: pagina 26)

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

PARTE 3

Esercizi sul Calcolo Integrale

INTEGRALI IMMEDIATI

Integrali indefiniti $\int x^{a}\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}+c,\ a \neq -1$

Esercizio 1 $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c =$
$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c$

Esercizio 2 $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{x^3}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx = \int x^{3-\frac{1}{3}}\,dx =$

$= \int x^{\frac{8}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{8}{3}+1}}{\frac{8}{3}+1}+c = \frac{x^{\frac{11}{3}}}{\frac{11}{3}}+c = \frac{3}{11}x^{\frac{11}{3}}+c =$

$= \frac{3}{11}\sqrt[3]{x^{11}}+c$

Esercizio 3 $\int (4x^5+3x^4-2x^3+3x^2-7x+2)\,dx =$

$= 4\cdot\frac{x^6}{6}+3\cdot\frac{x^5}{5}-2\frac{x^4}{4}+\cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}}-7\frac{x^2}{2}+2x+c$ (Ricordiamo che $\int dx = \int 1\cdot dx = x+c$) $= \frac{2}{3}x^6+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+x^3-\frac{7}{2}x^2+2x+c$

Esercizio 4 $I_4 = \int\left(\sqrt[5]{x}-\frac{5}{x^3}-3\sin x+\frac{9}{x}\right)dx$

Ricordiamo che $\int(-\sin x)\,dx = \cos x + c$ e che $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|+c$

Si ha: $I_4 = \int\left(x^{\frac{1}{5}}-5x^{-3}-3\sin x+\frac{9}{x}\right)dx = \frac{x^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1} -$
$- \frac{5x^{-3+1}}{-3+1}+3\cos x+9\ln|x|+c = \frac{x^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}+\frac{5}{2}x^{-2}+3\cos x+9\ln|x|+$
$+c = \frac{5}{6}x^{6/5}+\frac{5}{2}x^{-2}+3\cos x+9\ln|x|+c = \frac{5}{6}\sqrt[5]{x^6}+\frac{5}{2x^2}+3\cos x+$
$+9\ln|x|+c.$

Esercizio 5 $I_5 = \int\left(4\cos x-\frac{6}{x^2+1}+2e^x-\frac{1}{x^4}\right)dx$. Ricordiamo:
$\int \cos x\,dx = \sin x + c$, $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$, $\int e^x\,dx = e^x + c$. Si ha:
$I_5 = 4\sin x - 6\operatorname{arctg} x + 2e^x - \int x^{-4}\,dx = 4\sin x - 6\operatorname{arctg} x + 2e^x - \frac{x^{-4+1}}{-4+1}+$
$+c = 4\sin x - 6\operatorname{arctg} x + 2e^x + \frac{1}{3}x^{-3}+c = 4\sin x - 6\operatorname{arctg} x + 2e^x + \frac{1}{3x^3}+c.$

Esercizio 6:

CALCOLARE $\boxed{I_6 = \int \frac{1}{x^2} dx}$, Si ha:

$$I_6 = \int x^{-2} dx =$$

$$= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c =$$

$$= -x^{-1} + c$$

Ricordando infine che $x^{-1} = \frac{1}{x}$, si ottiene

$$= -\frac{1}{x} + c \, ,$$

che è la soluzione dell'esercizio.

Esercizio 7 Risolvere il seguente integrale utilizzando le regole di integrazione opportune

$$I_7 = \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} + 8x \right) dx$$

Svolgimento: per risolvere questo integrale utilizziamo la linearità di cui gode tale operatore: tale proprietà permette di scrivere l'integrale della somma come somma di integrali. Osserviamo, inoltre, che ogni addendo dell'integranda si può tranquillamente esprimere sotto forma di potenza, pertanto interviene anche la regola di integrazione per le potenze

$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c & \text{se } \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + c & \text{se } \alpha = -1 \end{cases}$$

Ora che conosciamo le strategie di soluzione procediamo con la soluzione dell'integrale

$$I_7 = \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} + 8x \right) dx =$$

Per la linearità si ha: $I_7 =$

$$= \int \sqrt{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx + 8 \int x dx =$$

Esprimiamo ogni termine in forma di potenza

$$I_7 = \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int x^{-2} dx + 8 \int x dx =$$

e facciamo intervenire la regola di integrazione delle potenze

$$I_7 = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + x^{-1} + 4x^2 + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{x} + 4x^2 + c.$$

L'integrale è risolto.

INTEGRALI QUASI IMMEDIATI

Esercizio 6: Calcolare il seguente integrale indefinito

$$I_6 = \int (2x-1)\cdot(x^2-x)^3\,dx$$

N.B.: Quando c'è una funzione, chiamiamola $w(x)$, tale che "sta dentro un'altra funzione", ψ, e quindi sostanzialmente c'è la funzione $\psi(w(x))$ che VIENE MOLTIPLICATA PER LA DERIVATA di w, cioè $w'(x)$, oppure viene moltiplicata per $k\cdot w'(x)$, ove $k \neq 0$ è un'opportuna costante moltiplicativa, allora SIAMO IN PRESENZA DI UN INTEGRALE "QUASI IMMEDIATO". Insomma, il nostro integrale è del tipo $\int \psi(w(x))\cdot k\cdot w'(x)\,dx$. Che cosa si fa? Intanto si porta k fuori dal segno di integrale, poi si considera la funzione ψ come funzione di w e se ne fa l'integrale (INDEFINITO) rispetto a w, cioè si determina una funzione φ che sia una primitiva di ψ (rispetto a w), cioè tale che $\varphi' = \psi$ (rispetto a w). Allora il nostro integrale diventa $k\cdot\int \varphi'(w(x))\,w'(x)\,dx = k\cdot\varphi(w(x)) + c =$
$= k\cdot(\varphi\circ w)(x) + c$ in virtù del teorema di derivazione delle funzioni composte. Adopereremo dunque questa tecnica nel risolvere questo e i prossimi integrali "quasi immediati". Nel nostro caso

$$I_8 = \int (2x-1)\cdot(x^2-x)^3\,dx$$

si ha: $w(x) = x^2 - x$, $w'(x) = 2x-1$, $\psi(w) = w^3 = \varphi'(w)$

$\varphi(w) = \int \psi(w)\,dw = \int w^3\,dw = \frac{w^4}{4}$ (+c, però basta prendere una primitiva e prenderemo $\boxed{\varphi(w) = \frac{w^4}{4}}$)

In virtù della formula dell'integrale quasi immediato, si ha:

$$\int \varphi'(w(x))\cdot w'(x)\,dx = \varphi(w(x)) + c$$ (V. anche la derivata delle funzioni composte)

$$\int (w(x))^3\cdot w'(x)\,dx = \frac{(w(x))^4}{4} + c$$

$$I_8 = \int (x^2-x)^3\cdot(2x-1)\,dx = \frac{(x^2-x)^4}{4} + c$$

Esercizio 9: Calcolare $I_9 = \int \sin x\cdot\cos^4 x\,dx = \int \sin x\cdot(\cos x)^4\,dx$.

Usando lo stesso procedimento dell'Esercizio 8, si ha:

$\boxed{I_9 =}$ (trucco) $-\int (\cos x)^4\cdot(-\sin x)\,dx = -\int(\cos x)^4\cdot D(\cos x)\,dx$;

$w(x) = \cos x$, $w'(x) = -\sin x$, $\psi(w) = w^4 = \varphi'(w)$

$\varphi(w) = \int \psi(w)\,dw = \int w^4\,dw = \frac{w^5}{5}$ (+c, ma basta prendere una primitiva e prenderemo $\varphi(w) = \frac{w^5}{5}$. Per la formula dell'integrale quasi immediato, si ha

$$\int \varphi'(w(x))\cdot w'(x)\,dx = \varphi(w(x)) + c$$

$$\int (w(x))^4\cdot w'(x)\,dx = \frac{(w(x))^5}{5} + c$$, e quindi

$$I_9 = -\int (\cos x)^4\cdot(-\sin x)\,dx = \boxed{-\frac{(\cos x)^5}{5} + c = -\frac{1}{5}\cos^5 x + c}.$$

Esercizio 10: Calcolare $I_{10} = \int x \cdot (x^2+1)^3 dx$

Anche qui possiamo usare lo stesso procedimento che nell'Esercizio 8. Consideriamo $w(x) = x^2+1$, $\varphi(w) = w^3$, per determinare φ poniamo $\varphi'(w) = w^3$, da cui $\varphi(w) = \int w^3 dw = \frac{w^4}{4} + c$, e prenderemo $\varphi(w) = \frac{w^4}{4}$. Adesso $w'(x) = 2x$, ma nell'integrale c'è x anziché $2x$, e allora considereremo $k \cdot w'(x)$, con $k = \frac{1}{2}$! infatti $k \cdot w'(x) = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2}x = x$. Si ha (formula dell'integrale quasi immediato):

$$\int \varphi'(w(x)) \cdot k \cdot w'(x)\, dx = k \cdot \varphi(w(x)) + c$$

$$\int (w(x))^3 \cdot k \cdot w'(x) dx = k \cdot \frac{(w(x))^4}{4} + c$$

$$I_{10} = \int x \cdot (x^2+1)^3 dx = \frac{(x^2+1)^4}{8} + c$$

Esercizio **11**: Calcolare $I_{11}=\int x\cdot e^{x^2}\,dx$

Anche qui usiamo lo stesso procedimento dell'Esercizio **8**.
Prendiamo $w(x)=x^2$, $\psi(w)=e^w=\varphi'(w)$, $\varphi(w)=\int e^w\,dw=$
$=e^w+c$ (sceglieremo $\varphi(w)=e^w$). Si ha: $w'(x)=2x$, ma nell'integrale c'è x invece di $2x$, e allora prenderemo $k\cdot w'(x)$, con $k=\frac{1}{2}$: infatti si ha $k\cdot w'(x)=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}x=x$. È:

$$\int\varphi'(w(x))\cdot k\cdot w'(x)\,dx=k\cdot\varphi(w(x))+c$$

(in virtù della formula dell'integrale quasi immediato)
Nel nostro caso si ha:

$$\int e^{w(x)}\cdot k\cdot w'(x)\,dx=k\,e^{w(x)}+c$$

, e quindi

$$I_{11}=\int x\cdot e^{x^2}\,dx=\int e^{x^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2x\,dx=\frac{1}{2}e^{x^2}+c$$

Esercizio **12**: Calcolare $I_{12}=\int x^2\cdot e^{x^3+4}\,dx$

Come nell'esercizio precedente, consideriamo
$w(x)=x^3+4$, $\psi(w)=e^w=\varphi'(w)$, $\varphi(w)=e^w$. Si ha:
$w'(x)=D(x^3+4)=D(x^3)+\underbrace{D(4)}_{0}=3x^2$ e non x^2, come invece c'è nel nostro integrale, e allora prendiamo $k\cdot w'(x)$, con $k=\frac{1}{3}$: infatti si ha $k\cdot w'(x)=\frac{1}{\cancel{3}}\cancel{3}x^2=x^2$.
Per la formula dell'integrale quasi immediato, si ha

$$\int\varphi'(w(x))\cdot k\cdot w'(x)\,dx=k\cdot\varphi(w(x))+c$$

, e quindi

$$\int e^{w(x)}\cdot k\cdot w'(x)\,dx=k\,e^{w(x)}+c$$

, da cui

$$I_{12}=\int x^2e^{x^3+4}\,dx=\int e^{x^3+4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 3x^2\,dx=\frac{1}{3}e^{x^3+4}+c$$

Esercizio 13: Calcolare l'integrale indefinito

$$I_{13} = \int \frac{1}{3x+2}\, dx$$

Teniamo presente che, quando il numeratore è la derivata del denominatore, si ha la formula

$$(\blacktriangledown) \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln |f(x)| + c$$

Ma, nel nostro caso, $D(3x+2) = 3\underbrace{D(x)}_{=1} + \underbrace{D(2)}_{=0} = 3$ e non 1. Allora bisogna far comparire l'espressione $\int \frac{3}{3x+2}\, dx$. Il "trucco" è quindi: moltiplicare per 3 dentro il segno di integrale e per $\frac{1}{3}$ fuori dal segno di integrale, utilizzando il fatto che le costanti moltiplicative possono essere portate dentro o fuori dal segno di integrale. Tenendo conto della formula ($\blacktriangledown$), si ha:

$$I_{13} = \frac{1}{3} \int \frac{3}{3x+2}\, dx = \frac{1}{3} \ln |3x+2| + c$$

Esercizio 14: Calcolare $I_{14} = \int \frac{1}{1-6x}\, dx$

Procedendo come nell'esercizio precedente, si ha $D(1-6x) = \underbrace{D(1)}_{=0} - 6 \underbrace{D(x)}_{=1} = -6$ e non 1. Allora moltiplichiamo per -6 dentro il segno di integrale e per $-\frac{1}{6}$ fuori dal segno di integrale. Utilizzando la formula ($\blacktriangledown$), si ottiene

$$I_{14} = -\frac{1}{6} \int \frac{-6}{1-6x}\, dx = -\frac{1}{6} \ln |1-6x| + c.$$

Esercizio 15: Calcolare

$$I_{15}^{*} = \int \frac{x}{x^2+10}\,dx$$

Osserviamo che il numeratore "somiglia molto" alla derivata del denominatore. Più precisamente, $D(x^2+10) = D(x^2) + \underbrace{D(10)}_{0} = 2x$. Ma noi abbiamo x invece che $2x$, e vogliamo avere l'espressione $\int \frac{2x}{x^2+10}\,dx$. Allora (trucco!) moltiplichiamo per 2 dentro il segno di integrale e per $\frac{1}{2}$ fuori dal segno di integrale, utilizzando la proprietà delle costanti moltiplicative (che possono essere portate dentro o fuori dal segno di integrale a seconda di quello che ci serve), e utilizziamo la formula

(▼) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$. Si ha:

$$I_{15} = \int \frac{x}{x^2+10}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+10}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+10| + c = \frac{1}{2}\ln(x^2+10) + c$$

(N.B.: Si ha che $|x^2+10| = x^2+10$, in quanto la quantità x^2+10 è sempre positiva)

Esercizio 16: Calcolare $I_{16} = \int \frac{x+2}{x^2+4x+1}\,dx$. Procedendo come nell'esercizio precedente, notiamo che

$$D(x^2+4x+1) = D(x^2) + 4\underbrace{D(x)}_{1} + \underbrace{D(1)}_{0} = 2x+4 = 2(x+2),$$

ma al numeratore abbiamo $x+2$. Allora moltiplichiamo per 2 dentro il segno di integrale e per $\frac{1}{2}$ fuori dal segno di integrale, e utilizziamo la formula (▼) di cui sopra. Si ottiene:

$$I_{16} = \int \frac{x+2}{x^2+4x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+2)}{x^2+4x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+1| + c$$

Esercizio 17. Calcolare $I_{17}=\int \frac{x^2-2}{x^3-6x}\,dx$

Notiamo che $D(x^3-6x) = D(x^3) - 6\cdot \overbrace{D(x)}^{=1} = 3x^2-6 = 3(x^2-2)$, ma al numeratore c'è x^2-2. Per avere $\int \frac{3(x^2-2)}{x^3-6x}\,dx$, allora dobbiamo moltiplicare per 3 dentro il segno di integrale. Allora moltiplichiamo per $\frac{1}{3}$ fuori dal segno di integrale (tenendo conto che le costanti moltiplicative possono essere portate dentro o fuori dal segno di integrale), e utilizziamo la formula

(▼) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+c$.

Si ha:

$$I_{17}=\int \frac{x^2-2}{x^3-6x}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3(x^2-2)}{x^3-6x}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x^3-6x|+c.$$

Esercizio 18: Calcolare $I_{18}=\int \frac{x-1}{x+5}dx$

Trucco: al numeratore, scriveremo $x-1=x+5-6$, così da qualche parte facciamo comparire $x+5$, cioè il denominatore, ottenendo

$$I_{18}=\int \frac{x-1}{x+5}dx=\int \frac{x+5-6}{x+5}dx=\int \frac{x+5}{x+5}dx-\int \frac{6}{x+5}dx=$$

$$=\int 1\cdot dx-6\int \frac{1}{x+5}dx=x-6\ln|x+5|+c,$$ in quanto, considerando $\int \frac{1}{x+5}dx$, si ha che il numeratore è la derivata del denominatore, e quindi si applica la formula $\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+c}$.

(infatti $D(x+5)=D(x)+D(5)=1+0=1$)

Esercizio 19: Calcolare $I_{19}=\int \frac{x-4}{x-2}dx$

Trucco: Come nell'esercizio precedente, essendoci $x-2$ al denominatore, esprimiamo il numeratore come "il denominatore più qualcosa" oppure "il denominatore meno qualcosa". Poniamo dunque $x-4=x-2-2$. Si ha:

$$I_{19}=\int \frac{x-4}{x-2}dx=\int \frac{x-2-2}{x-2}dx=\int \frac{x-2}{x-2}dx-\int \frac{2}{x-2}dx=$$

$=\int 1\cdot dx-2\int \frac{1}{x-2}dx=$ (Come nell'esercizio precedente, notiamo che $D(x-2)=D(x)-D(2)=$
$=1-0=1$, quindi il numeratore è la derivata del denominatore) $=$

$$=x-2\ln|x-2|+c$$

Esercizio 20: Calcolare $I_{20}=\int \frac{1-x}{x+3}dx$. Adoperiamo la stessa tecnica dell'esercizio precedente.

Essendoci al numeratore la quantità $-x$, è comodo fare il seguente "trucco": $I_{20}=-\int \frac{x-1}{x+3}dx$ (Come dire: abbiamo moltiplicato per -1 fuori e dentro il segno di integrale)

e, come nell'esercizio precedente, esprimiamo $x-1$ come $x+3$ + qualcosa (o − qualcosa) cioè $x-1=x+3-4$

$$I_{20} = -\int \frac{x-1}{x+3}\,dx = -\int \frac{x+3-4}{x+3}\,dx = -\left(\int \frac{x+3}{x+3}\,dx - \right.$$

$$\left. - \int \frac{4}{x+3}\,dx\right) = -\left(\int 1\cdot dx - 4\int \frac{1}{x+3}\,dx\right) = $$ (Notiamo che

$D(x+3) = D(x) + D(3) = 1 + 0 = 1$, quindi, nell'espressione $\int \frac{1}{x+3}\,dx$, il numeratore è la derivata del denominatore) =

$$= -\left(x - 4\ln|x+3| + c\right) = -x + 4\ln|x+3| + c$$

(n.b.: dire $+c$ oppure $-c$ è la stessa cosa, perché si indica la famiglia di tutte le costanti reali arbitrarie)

(Abbiamo applicato la formula

(▼) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$)

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi Calcolo di integrali (per parti)

Esercizio III. p 1 $I_{III,p,1} = \int x \cdot \cos x \, dx$

La formula di integrazione per parti si applica quando si calcola l'integrale del prodotto di due funzioni, di cui una è "facile da integrare", e l'altra è "facile da derivare". Nel nostro caso, conviene prendere $\cos x$ come "facile da integrare", perché $D(\sin x) = \cos x$, e consideriamo direttamente la funzione coseno come la derivata del seno. La derivata di x è $\underline{1}$, e quindi è naturale prendere x come "facile da derivare". Quindi, nella formula

(*) $\boxed{\int f'(x) \cdot g(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \, dx}$, prendiamo $f'(x) = \cos x$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$, $g'(x) = 1$ ottenendo $\int x \cdot \cos x \, dx = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx = x \sin x + \int (-\sin x) dx =$

$= x \cdot \sin x + \int D(\cos x) \, dx = x \sin x + \cos x + c.$

Esercizio III. p. 2 $I_{III,p,2} = \int x \cdot \ln x \, dx$ Con riferimento all'esercizio precedente, tra x e $\ln x$ la più "facile da integrare" è x, e quindi considereremo $\ln x$ come "facile da derivare". Pertanto, nella formula (*), prendiamo $f'(x) = x$, e quindi $f(x) = \frac{x^2}{2}$ ($D\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} D(x^2) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$); inoltre prendiamo $g(x) = \ln x$, e quindi $g'(x) = \frac{1}{x}$. Otteniamo $I_{III,p,2} = \int x \ln x \, dx =$
$= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c =$
$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c.$

Esercizio III. p. 3 $I_{III,p,3} = \int x^2 \ln x \, dx$. Come nell'esercizio precedente, prendiamo x^2 come "facile da integrare", $\ln x$ come "facile da derivare", quindi, nella formula (*), $f'(x) = x^2$, $f(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$ (si sceglie una primitiva e non scriviamo $+c$), $g(x) = \ln x$, $g'(x) = \frac{1}{x}$. Si ha: $I_{III,p,3} = \int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x -$
$- \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + c =$
$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c.$

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi - Calcolo di integrali (per parti)

Esercizio 11.β.4 $I_{11,\beta,4}=\int x e^{x}\,dx$ ~~Tra~~ le due funzioni x ed e^x, dovendo scegliere quale delle due è più "facile da integrare" e quale è più "facile da derivare", visto che la derivata di e^x è e^x che è se stessa, conviene prendere e^x "facile da integrare" e quindi x "facile da derivare", anche perché la derivata di x è 1, quindi - diciamo - l'esponente "si abbassa di grado" e non "si alza".

Quindi, nella formula $\boxed{\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int g'(x)\,f(x)\,dx}$ $(*)$, prendiamo: $f'(x)=e^x$, $g(x)=x$, $g'(x)=1$, $f(x)=e^x$, ottenendo $I_{11,\beta,4}=\int e^x\cdot x\,dx = e^x\cdot x-\int 1\cdot e^x\,dx = xe^x-e^x+c$ (visto che, sempre per il fatto che $D(e^x)=e^x$, si ha: $\int e^x\,dx=e^x+c$).

Esercizio 11.β.5 $I_{11,\beta,5}=\int x\,e^{-2x}\,dx$ Procedendo come nell'esercizio precedente, sceglieremo x come "facile da derivare", visto che $D(x)=1$ (il grado si abbassa).
Ma qual è l'integrale di e^{-2x}, cioè chi è $\int e^{-2x}\,dx$? Pensiamo alla derivata delle funzioni composte $\boxed{D(e^{w(x)})=e^{w(x)}\cdot w'(x)}$, prendiamo $w(x)=-2x$, quindi $w'(x)=-2$. Pertanto $D(e^{-2x})=-2e^{-2x}$, e quindi $D\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)=e^{-2x}$. Quindi e^{-2x} la possiamo scrivere come la derivata di $-\frac{1}{2}e^{-2x}$, e dunque prendiamo $f'(x)=e^{-2x}$, $f(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}$, $g(x)=x$, $g'(x)=1$, ottenendo: $I_{11,\beta,5}\overset{\text{formula }(*)}{=}$

$$=\int xe^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\cdot x-\int 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\,dx=-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}\int(-2)\cdot e^{-2x}\,dx=$$
$$=-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}\int D(e^{-2x})\,dx=-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+c$$

Esercizio 11.β.6 $I_{11,\beta,6}=\int xe^{-x}\,dx$. Similmente all'esercizio precedente, prendiamo x "facile da derivare" (quindi $g(x)=x$, $g'(x)=1$), ed $f'(x)=e^{-x}$. Determiniamo ora f. Per il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ha $D(e^{w(x)})=e^{w(x)}\cdot w'(x)$ e quindi, prendendo $w(x)=-x$, otteniamo $D(e^{-x})=(-1)\cdot e^{-x}=-e^{-x}$, quindi anche $D(-e^{-x})=-(-e^{-x})=e^{-x}$. Pertanto prenderemo $f(x)=-e^{-x}$, ottenendo, dalla formula $(*)$,
$$\int xe^{-x}\,dx=-xe^{-x}-\int -e^{-x}\,dx=-xe^{-x}-\int D(e^{-x})\,dx=-xe^{-x}-e^{-x}+c=-e^{-x}(x+1)+c.$$

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi: Integrali per parti

Esercizio 11.β.7 $I_{11,\beta,7} = \int x^3 e^x\,dx$. Conviene considerare come funzione "facile da derivare" la funzione x^3 (il grado si abbassa) e "facile da integrare" e^x, perché la derivata di e^x è e^x. Poniamo allora $f'(x) = e^x$, $f(x) = e^x$, $g(x) = x^3$, $g'(x) = 3x^2$. Ricordando la formula

$$\boxed{\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx} \quad (*)$$

, si ha: $\int x^3 e^x dx =$

$= x^3 e^x - \int 3x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 I_*$, ove $I_* = \int x^2 e^x dx$. Per calcolare I_* applichiamo un'altra volta la formula di integrazione per parti, scegliendo (analogamente come prima) $f'(x) = e^x$, $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$, $g'(x) = 2x$. Si ha:
$I_* = \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx$. Procedendo come prima si applica la formula di integrazione per parti ancora una volta, e si ha (v. esercizio 11.β.4) $\int x e^x dx = x e^x - e^x + c$. Da ciò si ottiene:
$I_* = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x + c) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$ (dire $-2c$ e dire $+c$ è la stessa cosa, perché c è una costante reale arbitraria), e quindi
$I_{11,\beta,7} = x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c) = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + c$ (dire $-3c$ o $+c$ è la stessa cosa, come prima) $= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$.

Esercizio 11.β.8. $I_{11,\beta,8} = \int x^2 \cos x\,dx$. Con lo stesso procedimento degli esercizi precedenti, prendiamo x^2 come funzione "facile da derivare" ($D(x^2) = 2x$, il grado si abbassa) e quindi $\cos x$ come funzione "facile da integrare", in quanto $D(\sin x) = \cos x$. Con riferimento alla formula $(*)$, prendiamo $g(x) = x^2$, $g'(x) = 2x$, $f'(x) = \cos x$, $f(x) = \sin x$, ottenendo: $\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x\,dx$. Applichiamo ancora la formula di integrazione per parti. Sia $J = \int x \sin x\,dx$: x è "facile da derivare" ($D(x) = 1$), $\sin x$ è "facile da integrare" ($D(\cos x) = -\sin x$ e quindi $D(-\cos x) = \sin x$). Applichiamo la formula $(*)$ con $f(x) = -\cos x$, $f'(x) = \sin x$, $g(x) = x$, $g'(x) = 1$. Si ha:
$J = -x\cos x - \int -\cos x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + c$. ($D(\sin x) = \cos x$)
Allora $\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x - 2J = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$ (dire $-2c$ o $+c$ è la stessa cosa, visto che c è una costante arbitraria).

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi: Integrali per parti

Esercizio 11.β.9 $I_{11,\beta,9} = \int x^2 \sin x \, dx$. Procedendo come nell'esercizio precedente, consideriamo la funzione x^2 "facile da derivare", $D(x^2) = 2x$ e la funzione $\sin x$ "facile da integrare", $D(\cos x) = -\sin x$ e quindi $D(-\cos x) = \sin x$; quindi nella formula per parti

$$\boxed{\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int g'(x) f(x) dx} \quad (*)$$

scegliamo $g(x) = x^2$, $g'(x) = 2x$, $f(x) = -\cos x$, $f'(x) = \sin x$. Si ha: $I_{11,\beta,9} = \int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x - \int 2x(-\cos x) dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx$. In $I_{11,\beta,1}$, sempre applicando la formula di integrazione per parti, avevamo visto che $\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + c$, da cui $\int 2x \cos x \, dx = 2\int x \cos x \, dx = 2x \sin x + 2 \cos x + c$ (scrivere $+2c$ oppure $+c$ è la stessa cosa, visto che c è una costante arbitraria). Quindi $I_{11,\beta,9} = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$.

Esercizio 11.β.10 $I_{11,\beta,10} = \int \cos^2 x \, dx$. Teniamo conto che $D(\sin x) = \cos x$. Si ha: $I_{11,\beta,10} = \int \cos x \cdot \cos x \, dx = \int (\sin x)' \cos x \, dx = \left[\begin{matrix} f(x) = \sin x & f'(x) = \cos x \\ g(x) = \cos x & g'(x) = -\sin x \end{matrix}\right]$ $=$ (vedi formula $(*)$) $= \sin x \cos x - \int \sin x(-\sin x) dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx = \sin x \cos x + \int 1 \cdot dx - \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cos x + x - I_{11,\beta,10}$, cioè $2 I_{11,\beta,10} = \sin x \cos x + x + c$ ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) da cui $I_{11,\beta,10} = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x + c$ (dire $\frac{1}{2}c$ oppure c è la stessa cosa, perché c indica una costante reale arbitraria).

Esercizio 11.β.11. $I_{11,\beta,11} = \int x \operatorname{arctg} x \, dx$. Tra le due funzioni x ed $\operatorname{arctg} x$, quella che è più "facile da integrare" è x, fornendo $\frac{x^2}{2}$ (infatti $\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c$, ossia $D\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} D(x^2) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$). Nella formula $(*)$, poniamo allora $f'(x) = x$, $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$, $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Si ha: $I_{11,\beta,11} = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \ldots\ldots$

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizio in. p. 11 continuazione

$\ldots = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$. Ora calcoliamo $K = \int \frac{x^2}{1+x^2}dx$. Si ha: $K = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \int \frac{1+x^2}{1+x^2}dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx = \int 1\,dx - \operatorname{arctg} x = x - \operatorname{arctg} x + c$. Pertanto si ha:

$I_{in,p,11} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}K = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c$

(dire $-\frac{1}{2}c$ è equivalente a dire $+c$, perché con c si indica una costante reale arbitraria...).

Esercizio in. p. 12 $I_{in,p,12} = \int \sin^2 x\, dx$. Teniamo conto che $D(\cos x) = -\sin x$, e quindi $D(-\cos x) = \sin x$. Si ha: $\boxed{I_{in,p,12}} = \int \sin x \cdot \sin x\, dx = \int (-\cos x)' \cdot \sin x\, dx = \overset{(*)}{=}$

$$\boxed{\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int g'(x)f(x)dx} \quad (*) \; f(x) = -\cos x,\ f'(x) = \sin x \quad g(x) = \sin x,\ g'(x) = \cos x$$

$\overset{(*)}{=} -\sin x \cdot \cos x - \int \cos x \cdot (-\cos x)dx = -\sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x\, dx =$ (visto che $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$)
$= -\sin x \cdot \cos x + \int (1 - \sin^2 x)dx = -\sin x \cdot \cos x + \int 1 \cdot dx - \int \sin^2 x\, dx = -\sin x \cos x + x - \boxed{I_{in,p,12}}$

Portando l'ultima quantità $-I_{in,p,12}$ a sinistra, si ha:

$2 \cdot I_{in,p,12} = -\sin x \cos x + x + c$ (oppure $+2c$) (tanto una costante arbitraria può essere indicata indifferentemente con c oppure con $2c$), da cui $I_{in,p,12} = \frac{-\sin x \cos x + x}{2} + c$

Allo stesso risultato si arriva se si conosce $\int \cos^2 x\, dx = \frac{\sin x \cos x + x}{2} + c$, perché, sempre per l'identità fondamentale $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, si ha $\int \sin^2 x\, dx = \int (1 - \cos^2 x)dx =$
$= \int 1\, dx - \int \cos^2 x\, dx = x - \frac{\sin x \cos x + x}{2} + c = \frac{2x - \sin x \cos x - x}{2} + c =$
$= \frac{-\sin x \cos x + x}{2} + c$, come volevamo dimostrare.

Esercizio in. p. 13 $\boxed{I_{in,p,13} = \int x \cdot \sin x\, dx}$. È l'integrale della fine di pag. 14, vedi la 6ª riga dell'Esercizio in. p. 8. Il risultato è: $\boxed{-x\cos x + \sin x + c}$.

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE: Integrali definiti

Esercizio 11.D.1 Calcolare $I_{11,D,1} = \int_{-1}^{1}(x^2+4)\,dx$

Si ha: $\int (x^2+4)\,dx = \int x^2\,dx + 4\int 1\cdot dx = \frac{x^3}{3}+4x+c$

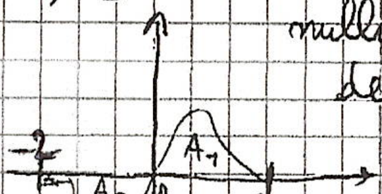
Adoperando la formula fondamentale del Calcolo Integrale, si ottiene $\int_{-1}^{1}(x^2+4)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-1}^{1} =$
$= \frac{1}{3}+4-\left(\frac{(-1)^3}{3}-4\right) = \frac{1}{3}+4+\frac{1}{3}+4 = \frac{2+24}{3} = \frac{26}{3}$

Esercizio 11.D.2 $I_{11,D,2} = \int_{-2}^{2}(x^3+2x)\,dx$. Si ha:

$\int (x^3+2x)\,dx = \int x^3\,dx + 2\int x\,dx = \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^2}{2} + c = \frac{x^4}{4}+x^2+c$.

Applicando la formula fondamentale del Calcolo Integrale, si ha

$\int_{-2}^{2}(x^3+2x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}+x^2\right]_{-2}^{2} = \frac{2^4}{4}+2^2-\frac{(-2)^4}{4}-(-2)^2 = \frac{16}{4}+4-\frac{16}{4}-4 =$
$= 4+4-4-4 = 0$. Si noti che si può vedere, <u>senza fare i conti</u>, che $I_{11,D,2}=0$, in quanto la funzione $h(x)$ è dispari ($h(x) = x^3+2x$), cioè $h(-x) = -h(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e l'intervallo $[-2,2]$ ha centro lo 0. Il fatto che l'integrale sia nullo deriva dal significato geometrico dell'integrale, osservando che la misura delle due aree A_1 e A_2 sono uguali, ma l'integrale è uguale alla somma dei due integrali $I_2^* = \int_{-2}^{0} h(x)\,dx = -A_2$ ed $I_1^* = \int_{0}^{2} h(x)\,dx = A_1$



$= A_1$ (perché, dove la funzione è positiva o nulla, "l'integrale coincide con l'area", dove la funzione è negativa o nulla, "l'integrale coincide con l'area cambiata di segno").

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE: Integrali definiti

Esercizio 11.D.3 Integrali definiti $I_{11.D.3} = \int_0^2 e^{x+2}\,dx$

Si ha: $I_{11,D,3} = \int_0^2 e^{x}\cdot e^{2}\,dx = e^{2}\cdot\int_0^2 e^{x}\,dx =$ (per la formula fondamentale del Calcolo Integrale) $= e^{2}\left[e^{x}\right]_0^2 =$
$= e^{2}\cdot(e^{2}-1) = e^{4}-e^{2}$

Esercizio 11.D.4 $I_{11,D,4} = \int_{-1}^{0} \sqrt[5]{x}\,dx = \int_{-1}^{0} x^{\frac{1}{5}}\,dx$.

Si ha, per la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale,
$I_{11,D,4} = \left[\dfrac{x^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1}\right]_{-1}^{0} = \left[\dfrac{x^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}\right]_{-1}^{0} = \dfrac{5}{6}\left[x^{\frac{6}{5}}\right]_{-1}^{0} =$
$= \dfrac{5}{6}\cdot\left(0^{\frac{6}{5}} - (-1)^{\frac{6}{5}}\right) = \dfrac{5}{6}\left(-\sqrt[5]{(-1)^{6}}\right) = \dfrac{5}{6}\cdot(-1) = -\dfrac{5}{6}$.

Esercizio 11.D.5 $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x\,dx$. Ricordiamo che $D(\cos x) = -\sin x$, quindi $D(-\cos x) = \sin x$. Quindi una primitiva di $\sin x$ è $-\cos x$. Per la formula fondamentale del Calcolo Integrale, è $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{4} =$
$= 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Esercizio 11.D.6 $I_{11,D,6} = \int_0^2 (x^2-3x+1)\,dx$. Calcoliamo dapprima l'integrale indefinito $K^* = \int (x^2-3x+1)\,dx$. Si ha:
$K^* = \int x^2\,dx - 3\int x\,dx + \int 1\cdot dx = \frac{x^3}{3} - 3\cdot\frac{x^2}{2} + x + C$. Applicando la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale, si ottiene
$I_{11,D,6} = \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - 3\cdot\frac{2^2}{2} + 2 \cancel{-0} = \frac{8}{3} - 6 + 2 =$
$= \frac{8}{3} - 4 = \frac{8-12}{3} = -\frac{4}{3}$.

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizio 11.D.7 Integrali definiti

$$I_{11,D,7} = \int_{\pi/2}^{\pi} (x+4)\cdot \cos x \, dx$$

Esercizi di questo tipo si risolvono:
1) calcolando dapprima l'integrale indefinito (cioè, le classi delle primitive);
2) poi, applicando la formula fondamentale del Calcolo Integrale.

Calcoliamo dapprima (per parti) l'integrale $K_0 = \int (x+4)\cdot \cos x \, dx$.
Consideriamo come funzione "facile da derivare" la funzione $x+4$ (visto che la sua derivata è 1), e come funzione "facile da integrare" la funzione $\cos x$ $(D(\sin x) = \cos x)$. Nella formula

$$\boxed{\int f'(x) g(x) dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\, dx} \quad (*)$$

prendiamo $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $g(x) = x+4$, $g'(x) = 1$. Si ha:

$$K_0 = \int (\sin x)' \cdot (x+4)\, dx = (\sin x)\cdot(x+4) - \int \sin x \cdot 1\, dx = (\sin x)\cdot(x+4) + \int(-\sin x)\, dx =$$

$D(\cos x) = -\sin x$

$= (\sin x)\cdot(x+4) + \cos x + c$. Applichiamo ora la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale, si ha: $I_{11,D,7} = \left[(\sin x)\cdot(x+4) + \cos x\right]_{\pi/2}^{\pi} =$

$$= (\underbrace{\sin \pi}_{0})\cdot(\pi+4) + \underbrace{\cos \pi}_{-1} - (\underbrace{\sin \pi/2}_{1})\cdot\left(\frac{\pi}{2}+4\right) - \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{0} = -1 - \left(\frac{\pi}{2}+4\right) = -5 - \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 11.D.8

Si risolve come quello precedente. $I_{11,D,8} = \int_0^{\pi/3} (x-1) \sin x \, dx$. Calcoliamo dapprima l'integrale indefinito $J^* = \int (x-1) \sin x \, dx$. Prenderemo, nella formula $(*)$, $g(x) = x-1$, e quindi $g'(x) = 1$, e poi osserviamo che $D(\cos x) = -\sin x$, quindi $D(-\cos x) = \sin x$. Scegliamo allora $f(x) = -\cos x$ ed $f'(x) = \sin x$. Si ha:

$$J^* = (-\cos x)\cdot(x-1) - \int(-\cos x)\cdot 1\, dx = \cos x - x\cos x + \int \cos x \, dx =$$

$$= \cos x - x \cos x + \sin x + c = \cos x(1-x) + \sin x + c.$$ Applichiamo la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale. Si ha: $I_{11,D,8} = \left[\cos x(1-x) + \sin x\right]_0^{\pi/3} =$

$$= \left(\cos \frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(1 - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\frac{\pi}{3} - \cos 0 \cdot (1-0) - \underbrace{\sin 0}_{0} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

ESERCIZIO 11.D9 (integrali definiti)

Calcolare $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx = I_{in,D,9}$

Calcoliamo ~~dapprima~~ l'integrale indefinito $K_* = \int \operatorname{arctg} x\, dx$, adoperando il seguente trucco: si moltiplica per 1, e poi si considera la funzione 1 come la derivata della funzione x. Si ha: $K_* = \int 1 \operatorname{arctg} x\, dx = \int x' \operatorname{arctg} x\, dx$.

Scriviamo la formula di integrazione per parti:

$$\int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx \qquad (*)$$

dove $f(x) = x$, $f'(x) = 1$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$, $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Si ha:

$K_* = x \operatorname{arctg} x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx = \dots$ (il numeratore è x, mentre la derivata del denominatore è $2x$; quindi, per ottenere che il numeratore ~~sia~~ sia la derivata del denominatore bisogna moltiplicare per 2 dentro l'integrale e per $\frac{1}{2}$ fuori dall'integrale, ottenendo (TRUCCO):

$$K_* = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2}\, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

(infatti, $\int \frac{h'(x)}{h(x)}\, dx = \ln|h(x)| + c$; nel nostro caso $h(x) = 1+x^2$, sempre positiva)

Applichiamo ora la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale, ottenendo

$$I_{in,D,9} = \int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx = \left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right]_0^1 = 1 \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2} \ln(1+1^2) -$$

$$- 0 \cdot \operatorname{arctg} 0 + \frac{1}{2} \ln(\underbrace{1+0^2}_{0}) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

-21- DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE
ESERCIZIO n11.D.10 (integrali definiti)

Calcolare: $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = I_{in,D,10}$

Calcoliamo dapprima l'integrale indefinito $K = \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \ln x\,dx$.
Vediamo quale delle due funzioni $x^{-\frac{1}{2}}$, $\ln x$, è più "facile da integrare" e quale è più "facile da derivare". Si ha:
$\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$, quindi, nella formula

$$\boxed{\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx \quad (*)}$$

poniamo $f(x) = 2\sqrt{x}$, $f'(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, $g(x) = \ln x$, $g'(x) = \frac{1}{x}$, ottenendo
$K = \int (2\sqrt{x})' \ln x\,dx = 2\sqrt{x} \cdot \ln x - \int 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}\,dx = 2\sqrt{x} \cdot \ln x - 2\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}\,dx =$
$= 2\sqrt{x} \cdot \ln x - 2\int x^{\frac{1}{2}-1}\,dx = 2\sqrt{x} \cdot \ln x - 2\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\sqrt{x} \cdot \ln x - 4\sqrt{x}$
$+c$

Applicando ora la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale, si ottiene

$$I_{in,D,10} = \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^e x^{-\frac{1}{2}} \ln x\,dx = \left[2\sqrt{x} \cdot \ln x - 4\sqrt{x}\right]_1^e =$$

$$= 2\sqrt{e} \cdot \underbrace{\ln e}_{1} - 4\sqrt{e} - 2\sqrt{1} \cdot \underbrace{\ln 1}_{0} + 4\sqrt{1} = -2\sqrt{e} + 4.$$

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE ESERCIZIO m.D.11 (integrali definiti)

Calcolare $\int_5^7 \ln(x-4)\,dx \overset{I_{m,D,11}}{=}$ Calcoliamo dapprima l'integrale indefinito $J=\int \ln(x-4)\,dx$. Innanzi tutto osserviamo che $d(x-4)=dx-d4=dx-0=dx$ (il differenziale d ha le stesse proprietà analoghe a quelle della derivata), quindi $J=\int \ln(x-4)\,d(x-4) \overset{w=x-4}{=} \int \ln w\,dw$. Calcoliamo J PER PARTI, con il seguente TRUCCO: $J=\int 1\cdot \ln w\,dw$ (si mette l'1 davanti) $=\int w'\ln w\,dw$ (si considera 1 come la derivata di w) $=\ldots$ Applichiamo la formula di integrazione per parti $\boxed{\int f'(w)\cdot g(w)\,dw = f(w)\cdot g(w)-\int f(w)\cdot g'(w)\,dw \quad (*)}$, dove $f(w)=w$, $f'(w)=1$, $g(w)=\ln w$, $g'(w)=\frac{1}{w}$, ottenendo $J=w\cdot\ln w-\int w\cdot\frac{1}{w}\,dw=$
$=w\cdot \ln w - w + c \overset{w=x-4}{=} (x-4)\cdot\ln(x-4)-x+4+c=(x-4)\cdot\ln(x-4)-x+c$ ($4+c$ può essere considerata un'unica costante). Applichiamo ora la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale. Si ha:

$$I_{m,D,11}=\int_5^7 \ln(x-4)\,dx=\Big[(x-4)\cdot\ln(x-4)-x\Big]_5^7=(7-4)\cdot\ln(7-4)-7-$$
$$-(5-4)\underbrace{\ln(5-4)}_{\ln 1=0}+5=3\ln 3-2$$

ESERCIZIO m.D.12 Calcolare $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx \overset{I_{m,D,12}}{=}$ Usiamo lo stesso trucco dell'esercizio precedente. Calcoliamo $K=\int \ln(1+x^2)\,dx=\int 1\cdot\ln(1+x^2)\,dx=$
$=\int x'\ln(1+x^2)\,dx$ $\left(\begin{matrix} f(x)=x\\ f'(x)=1\end{matrix}, g(x)=\ln(1+x^2),\ g'(x)=\frac{1}{1+x^2}D(1+x^2)=\frac{2x}{1+x^2}\right)=$
$=$ (applichiamo la formula (*) dell'esercizio precedente) $=x\ln(1+x^2)-\int\frac{x\cdot 2x}{1+x^2}\,dx=$
$=x\ln(1+x^2)-2\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx=x\ln(1+x^2)-2\int\frac{1+x^2}{1+x^2}\,dx-2\int-\frac{1}{1+x^2}\,dx=$
$=x\ln(1+x^2)-2\int 1\,dx+2\int\frac{1}{1+x^2}\,dx=x\ln(1+x^2)-2x+2\,\text{arctg}\,x+c$. Ora, per calcolare I applichiamo la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale, ottenendo

$$I_{m,D,12}=\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx=\Big[x\ln(1+x^2)-2x+2\,\text{arctg}\,x\Big]_0^1=1\cdot\ln(1+1^2)-2\cdot 1+$$
$$+2\cdot\underbrace{\text{arctg}\,1}_{\pi/4}-\underbrace{0\cdot\ln(1+0^2)}_{0}-2\cdot 0+2\cdot\underbrace{\text{arctg}\,0}_{0}=\ln 2-2+\frac{\pi}{2}.$$

INTEGRALI PER SOSTITUZIONE

Esercizio 1: Calcolare $I_{in,S,1} = \int \frac{1}{\sqrt{x} + x \cdot \sqrt{x}} dx$

In questo caso si adopera la tecnica dell'integrazione PER SOSTITUZIONE. Poniamo $\boxed{\sqrt{x} = w}$. Allora si ha: $x = w^2$, $x'(w) = 2w$, e considerato che

$$\boxed{dx = x'(w)\, dw}$$

(che deriva dal fatto che $dx = \frac{dx}{dw} dw$, $\frac{dx}{dw} = x'(w)$, vedi anche Parte 3, testo adottato), si ha $dx = 2w\, dw$. Adesso, facendo tutte le dovute sostituzioni, otteniamo

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + x \cdot \sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{w + w^2 \cdot w} \cdot 2w\, dw =$$

$$= 2\int \frac{1}{\cancel{w}(1+w^2)} \cancel{w}\, dw \underset{\text{immediato)}}{\overset{\text{(integrale}}{=}} 2 \operatorname{arctg} w + c \overset{w=\sqrt{x}}{=} 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) + c.$$

Esercizio: Calcolare $I_{in,S,2} = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$

Poniamo $e^x = w$. Allora $x = \ln w$, $dx = x'(w)\, dw = \frac{1}{w} dw$, vedi anche PARTE 3 (perché $dx = \frac{dx}{dt} \cdot dt$, $\frac{dx}{dt} = x'(t)$, vedi anche PARTE 3 TESTO ADOTTATO). Inoltre $e^{2x} = (e^x)^2 = w^2$, per le proprietà delle potenze. Si ha quindi, sostituendo:

$$\boxed{I_{in,S,2}} = \int \frac{\cancel{w}}{w^2+1} \cdot \frac{1}{\cancel{w}} dw \underset{\text{immediato)}}{\overset{\text{(integrale}}{=}} \operatorname{arctg} w + c \underset{\substack{\text{(torniamo} \\ \text{ad } x)}}{\overset{(w=e^x)}{=}}$$

$$= \boxed{\operatorname{arctg}(e^x) + c}.$$

Esercizio: Calcolare $I_{in,S,3} = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2}dx$

Come nell'esercizio precedente, poniamo $e^x = w$. Allora $x = \ln w$, $dx = x'(w)\,dw = \frac{1}{w}dw$, $e^{2x} = e^{x\cdot 2} = (e^x)^2 = w^2$ per le proprietà delle potenze. Pertanto, facendo tutte le dovute sostituzioni, si ottiene

$I_{in,S,3} = \int \frac{w^{\cancel{2}}}{w^2+2}\frac{1}{\cancel{w}}dw = \int \frac{w}{w^2+2}dw$. Osserviamo che $D(w^2+2) = 2w + D(2) = 2w$, mentre al numeratore c'è w. Allora adoperiamo il seguente trucco: moltiplichiamo per 2 dentro il segno di integrale e per $\frac{1}{2}$ fuori dal segno di integrale, in modo da avere

$I_{in,S,3} = \frac{1}{2}\int \frac{2w}{w^2+2}dw = \frac{1}{2}\ln|w^2+2| + c = \frac{1}{2}\ln(w^2+2)+c$

(w^2+2 è sempre positivo)

(in quanto, quando il numeratore è uguale alla derivata del denominatore, sussiste la formula $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+c$). Ora, "ritornando" alla variabile x, tenendo conto che $w^2 = e^{2x}$, riotteniamo

$I_{in,S,3} = \frac{1}{2}\ln(w^2+2)+c = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+2)+c.$

<u>Esercizio</u>: Calcolare $I_{in,s,4} = \int \frac{3e^x}{1+e^{2x}}dx = 3\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

Notiamo che, per le proprietà delle potenze, si ha: $e^{2x} = e^{x\cdot 2} = (e^x)^2$.

Poniamo $w = e^x$; allora $e^{2x} = (e^x)^2 = w^2$; $x = \ln w$;

$dx = x'(w)\,dw = \frac{1}{w}dw$. Facendo tutte le dovute sostituzioni, si ottiene: $\boxed{I_{in,s,4}} = 3\int \frac{\cancel{w}}{1+w^2}\cdot\frac{1}{\cancel{w}}dw$ = (integrale immediato) $= 3\,\mathrm{arctg}\, w + C = (w = e^x) = \boxed{3\,\mathrm{arctg}\,(e^x) + c}$

Esercizio: Calcolare $\boxed{I_{in,s,5} = \int (2x+1)^7 dx}$

Poniamo $\boxed{2x+1 = w}$. Allora $2x = w-1$, quindi $x = \frac{w-1}{2} = \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}$,

da cui $x'(w) = \frac{1}{2}\underbrace{D(w)}_{=1} - \underbrace{D(\tfrac{1}{2})}_{=0} = \frac{1}{2}$. Inoltre

$$\boxed{dx} = \boxed{x'(w)\,dw} = \boxed{\frac{1}{2}dw}$$

(N.B.: ricordiamo che la formula $dx = x'(w)\,dw$ deriva dal fatto che $dx = \frac{dx}{dw}\cdot dw$ e che $\frac{dx}{dw} = x'(w)$, vedi anche Parte 3, testo adottato). Pertanto, facendo tutte le dovute sostituzioni, otteniamo

$\boxed{I_{in,s,5}} = \int w^7\cdot\frac{1}{2}dw = \frac{1}{2}\int w^7 dw = \frac{1}{2}\cdot\frac{w^8}{8} + c = \frac{1}{16}w^8 + C \underset{w=2x+1}{=} \boxed{\frac{1}{16}(2x+1)^8 + C}$. [Notiamo che $I_{in,s,5}$ può essere visto anche come un integrale <u>quasi</u> immediato, allora prendiamo

con il "trucco" $I_{in,s,5} = \int (2x+1)^7\cdot 1\,dx$; allora, per $w(x) = 2x+1$, si ha $w'(x) = 2\cdot\underbrace{D(x)}_{=1} + \underbrace{D(1)}_{=0} = \boxed{2}$ e non 1: allora, per avere 2 dentro il segno di integrale, sarà sufficiente moltiplicare per 2 dentro il segno di integrale e moltiplicare per $\frac{1}{2}$ fuori dal segno di integrale, ottenendo

$$I_{in,s,5} = \frac{1}{2}\int (2x+1)^7\cdot 2\,dx = \frac{1}{2}\int w(x)^7\cdot w'(x)\,dx \;]$$

Poniamo ora $\psi(w) = w^7$ e $\varphi(w) = \int \psi(w)\,dw = \frac{w^8}{8}$ (non ci aggiungiamo c, basta prendere <u>una</u> primitiva). Allora $\varphi'(w(x)) = (w(x))^7$ e quindi, in virtù della formula dell'integrale quasi immediato, si ha

$I_{in,5,5} = \frac{1}{2}\int \varphi'(w(x))\cdot w'(x)\,dx = \frac{1}{2}\varphi(w(x)) + c$

$\left(= \frac{1}{2}(\varphi\circ w)(x) + c\right) = \frac{1}{2}\frac{(w(x))^8}{8} + c \underset{=2x+1}{\overset{w(x)=}{=}} \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^8}{8} + c =$

$= \boxed{\frac{1}{16}\cdot(2x+1)^8 + c}$, ottenendo lo stesso risultato che avevamo trovato con la tecnica dell'integrazione per sostituzione. Osserviamo che la funzione $w = w(x)$ che interviene nella formula dell'integrale quasi immediato è la stessa funzione $w = w(x)$ che interviene nell'integrazione per sostituzione: IN QUESTO CONSISTE IL COLLEGAMENTO PROFONDO TRA GLI INTEGRALI QUASI IMMEDIATI E L'INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE !!!

Infatti, in questo stesso modo si può vedere che gli integrali quasi immediati si possono fare anche per sostituzione.

Esempio: Ricalcoliamo (vedi pag. 4 di queste note) l'integrale

$I_9 = \int \sin x \cdot \cos^4 x\,dx = \int \sin x\cdot(\cos x)^4\,dx$

con la tecnica per sostituzione. Poniamo $w = w(x) = \cos x$. Allora questa volta, invece di passare alla funzione inversa (arcocoseno) usiamo il seguente trucco: notiamo che la derivata di $\cos x$ è $-\sin x$, quindi $\sin x = -w'(x) = -\frac{dw}{dx}$ (perché $w'(x) = \frac{dw}{dx}$, vedi anche parte 3 testo adottato: questo è il trucco fondamentale dell'integrazione per sostituzione!)

Allora, con le dovute sostituzioni, otteniamo:

$\boxed{I_9 =} \int -\frac{dw}{\cancel{dx}}\cdot w^4\cdot\cancel{dx} = -\int w^4\,dw$ (il $-$, cioè la costante moltiplicativa -1, può essere portato dentro o fuori dal segno di integrale) $=$ (integrale immediato) $-\frac{w^5}{5} + c = \boxed{-\frac{(\cos x)^5}{5} + c = -\frac{1}{5}\cos^5 x + c}$, cioè lo stesso risultato che era stato ottenuto a pag. $\boxed{4.}$